MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

LIMITI

DEFINIZIONE

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \bar{A}$. Diremo che

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ (con $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$)

se $\forall$ V intorno di ℓ, $\exists$ U intorno di x_0 : $f(U \cap A) \subseteq V$

vari casi

$x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$ $\to$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

$x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell = +\infty$ $\to$ $\forall H > 0$ $\exists \delta > 0$: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > H$

$x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell = -\infty$ $\to$ $\forall H > 0$ $\exists \delta > 0$: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -H$

$x_0 = +\infty$, $\ell \in \mathbb{R}$ $\to$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N > 0$: $x > N \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

$x_0 = +\infty$, $\ell = +\infty$ $\to$ $\forall H > 0$ $\exists N > 0$: $x > N \Rightarrow f(x) > H$

$x_0 = +\infty$, $\ell = -\infty$ $\to$ $\forall H > 0$ $\exists N > 0$: $x > N \Rightarrow f(x) < -H$

$x_0 = -\infty$, $\ell \in \mathbb{R}$ $\to$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N > 0$: $x < -N \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

$x_0 = -\infty$, $\ell = +\infty$ $\to$ $\forall H > 0$ $\exists N > 0$: $x < -N \Rightarrow f(x) > H$

$x_0 = -\infty$, $\ell = -\infty$ $\to$ $\forall H > 0$ $\exists N > 0$: $x < -N \Rightarrow f(x) < -H$

TEOREMA
Il limite, se esiste, è unico

TEOREMA
Se esistono i limiti destro e sinistro, e coincidono, allora esiste il limite (e viceversa)

TEOREMA (permanenza del segno)
Se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell > 0$, allora esiste un intorno U di x_0 tale che $x \in U \Rightarrow f(x) > 0$
(analogamente se $\ell < 0$)

TEOREMA (del confronto a 3 o dei carabinieri)
Supponiamo che in un intorno di $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ si abbia

$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$

Allora anche $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

TEOREMI DI CESARO

Ⓘ $a_n \to \ell \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \to \ell$

Ⓘ$\!$Ⓘ $a_n - a_{n+1} \to \ell \quad \Rightarrow \quad \frac{a_n}{n} \to \ell$

Ⓘ$\!$Ⓘ$\!$Ⓘ $a_n \to \ell \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \to \ell \qquad (\text{se } a_n \geq 0)$

Ⓘ$\!$Ⓥ $a_n \geq 0, \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \to \ell$

CRITERIO DELLA RADICE

$a_n \geq 0$ definitivamente, $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Allora: se $\ell > 1$ si ha $a_n \to +\infty$
se $\ell < 1$ si ha $a_n \to 0$
se $\ell = 1$ BOH

CRITERIO DEL RAPPORTO

$a_n > 0$ definitivamente, $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Allora: se $\ell > 1$ si ha $a_n \to +\infty$
se $\ell < 1$ si ha $a_n \to 0$
se $\ell = 1$ BOH

FORMULA DI STERLING

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

semplificata $\to \sqrt[n]{n!} \approx \frac{n}{e}$

master cozy corsi 050/8312126 388/9837745

CONTINUITÀ

$f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Si dice che f è continua in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0^+} = \lim_{x \to x_0^-} = f(x_0)$$

Proprietà

f, g continue $\Rightarrow$ $f+g$ continua
f, g continue $\Rightarrow$ $f \cdot g$ continua
f continua $\Rightarrow$ $|f|$ continua
f continua $\Rightarrow$ $\frac{1}{f}$ continua su $\{x : f(x) \neq 0\}$
f, g continue $\Rightarrow$ $f \vee g$ e $f \wedge g$ continue

DERIVAZIONE

Sia $f: A \to \mathbb{R}$ e sia x_0 p.to di accumulazione di A.
Si dice RAPPORTO INCREMENTALE di f rispetto a x_0 la funzione

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{definita in } A \setminus \{x_0\}$$

Il limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ si dice DERIVATA di f in x_0

TEOREMA

f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0

SOMMA

f, g derivabili in $x_0 \Rightarrow f+g$ derivabile in x_0

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

PRODOTTO

f, g derivabili in $x_0 \Rightarrow f \cdot g$ derivabile in x_0

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$$

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0)\, g^{(n-k)}(x_0)$$

RECIPROCO

f derivabile in x_0, $f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f}$ derivabile in x_0

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2}$$

Quindi

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f' \frac{1}{g} + f\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

COMPOSTA

f derivabile in x_0
g derivabile in $f(x_0)$
$\Longrightarrow g \circ f$ derivabile in x_0

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

INVERSA

$x_0 \in]a;b[$, $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ continua strettam. monotona

Allora f derivabile in x_0, $f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow f^{-1}$ derivabile in $f(x_0)$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

TEOREMA (di esistenza degli zeri)

$f:[a;b] \to \mathbb{R}$ funzione continua con $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$ intervallo chiuso

$f(a) \cdot f(b) < 0$ ($f(a)$ e $f(b)$ hanno segno diverso)

Allora $\exists c$: $f(c) = 0$ con $c \in (a;b)$

TEOREMA (Monotonia 1)

Supponiamo $f'(x_0) > 0$. Allora $\exists \delta > 0$ tale che

$f(x) > f(x_0)$ $\forall x \in (x_0; x_0+\delta]$

$f(x) < f(x_0)$ $\forall x \in [x_0-\delta; x_0)$

(Analogamente se $f'(x_0) < 0$)

TEOREMA (Monotonia 2)

$f:[a;b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a;b]$
derivabile in $(a;b)$

Allora:
① f DEBOLMENTE crescente in $[a;b] \Rightarrow f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (a;b)$
② f STRETTAMENTE crescente in $[a;b] \Rightarrow f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (a;b)$
③ $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (a;b) \Rightarrow f$ DEBOLMENTE crescente in $[a;b]$
④ $f'(x) > 0$ $\forall x \in (a;b) \Rightarrow f$ STRETTAMENTE crescente in $[a;b]$

(Analogamente nel caso decrescente)

TEOREMA (Monotonia 3)

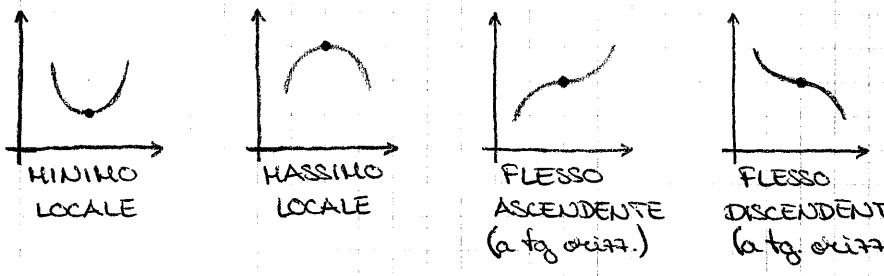
Supponiamo $f'(x) \geq 0$ in $(a;b)$
$f'(x)$ si annulla al più sporadicamente (non si annulla in un intero intervallo)

Allora: f STRETTAMENTE crescente

(Analogamente con $f'(x) \leq 0$)

PUNTI STAZIONARI

P.ti x tali che $f'(x) = 0$



TEOREMA (di Weierstrass)
Sia $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua
↳ intervallo chiuso e limitato, estremi compresi
Allora esistono $\max\{f(x): x\in[a;b]\}$ e $\min\{f(x): x\in[a;b]\}$

TEOREMA (di Rolle)
Sia $f:[a;b]\to\mathbb{R}$
Supponiamo:
(i) f continua in $[a;b]$
(ii) f derivabile in $(a;b)$
(iii) $f(a)=f(b)$
Allora $\exists c\in(a;b)$ tale che $f'(c)=0$

TEOREMA (di Cauchy)
$f:[a;b]\to\mathbb{R}$ e $g:[a;b]\to\mathbb{R}$
Supponiamo:
(i) f e g continue in $[a;b]$
(ii) f e g derivabili in $(a;b)$
(iii) $g'(x)\neq 0 \quad \forall x\in(a;b)$
Allora si ha $g(a)\neq g(b)$ ed $\exists c\in(a;b)$ tale che

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

TEOREMA (di Lagrange)
$f:[a;b]\to\mathbb{R}$
Supponiamo
(i) f continua in $[a;b]$
(ii) f derivabile in $(a;b)$
Allora $\exists c\in(a;b)$ tale che $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

TEOREMA (di De L'Hôpital, forma $\frac{0}{0}$)
Siano $f,g:(a;b)\to\mathbb{R}$ continue, e sia $x_0\in(a;b)$ tale che
$f(x_0)=g(x_0)=0$
Supponiamo:
(i) f e g derivabili in $(a;b)\setminus\{x_0\}$
(ii) $g'\neq 0$ in $(a;b)\setminus\{x_0\}$
(iii) esiste il limite $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=L\in\overline{\mathbb{R}}$
Allora si ha $g\neq 0$ in $(a;b)\setminus\{x_0\}$ ed esiste il limite
$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$ (stesso L)

TEOREMA (di De L'Hôpital, forma $\frac{\infty}{\infty}$)
Siano $f,g:(a;b)\to\mathbb{R}$ continue, derivabili e tali che (preso $x_0=a$)
(i) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\pm\infty$
(ii) $g'\neq 0$ in $(a;b)$
(iii) esiste il limite $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=L\in\overline{\mathbb{R}}$
Allora esiste il limite $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$ (stesso L)

COPISTERIA 081/8311260 338/9837745